Musterlösungen
2. Vordiplom
Mathematik III: Analysis
(D-ERDW)

1. Die Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2$ definiert die Abbildung

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}.$$

Die Tangentialebene an einen beliebigen Punkt des Bildes von g ist definiert durch die Richtungsvektoren

$$\frac{\partial}{\partial x} g(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} \text{ und } \frac{\partial}{\partial y} g(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix}.$$

Folgende zwei Ansätze führen zur Lösung des Problems:

- Normalvektor:
  Der Normalvektor, welcher senkrecht zur Tangentialebene im Punkt $(x, y, f(x,y))$ steht, ist
  $$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix}.$$
  Somit gilt
  $$\begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$
  dann, und genau dann, wenn $x = 1, y = 2$ und $c = 1$. Somit ist die Tangentialebene an $P = (1,2,5)$ senkrecht zum Vektor $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Lineares Gleichungssystem:
  Die Tangentialebene hat senkrecht zum Vektor $\mathbf{v}$ zu stehen. Somit muss gelten, dass
  $$\left\langle \frac{\partial}{\partial x} g(x,y), \mathbf{v} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial y} g(x,y), \mathbf{v} \right\rangle = 0,$$
  d.h.
  $$-2 + 2x = 0$$
  $$-4 + 2y = 0.$$
  Es folgt somit direkt, dass $(x,y) = (1,2)$ respektive $P = (1,2,5)$.

Bitte wenden!

2. Das n-te Taylorpolynom von einer Funktion f an der Stelle $\mathbf{a}$:

$$f^{[n]}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r!} d^r f(\mathbf{a})\mathbf{h}.$$

Sei $f(x,y) = x^y = e^{y \ln x}$.

a) Lineare Approximation

$$\begin{aligned} f^{[1]}(x+h_1, y+h_2) &= f(x,y) + df(x,y) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \\ &= x^y + (\frac{y}{x}x^y, x^y \ln x) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Somit erhält man als lineare Approximation

$$\begin{aligned} (1.01)^{4.98} &= f(1+0.01, 5-0.02) \\ &\approx 1 + (5,0) \begin{pmatrix} 0.01 \\ -0.02 \end{pmatrix} = 1.05 \end{aligned}$$

b) Taylorpolynom 2. Grades

$$f^{[2]}(x+h_1, y+h_2) = f(x,y) + df(x,y) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(h_1,h_2) d^2 f(x,y) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix},$$

wobei

$$\begin{aligned} (h_1,h_2) d^2 f(x,y) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} &= (h_1,h_2) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y) & \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) h_1^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) h_1 h_2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) h_1^2 \end{aligned}$$

Angewandt auf unserer Funktion $f(x,y) = e^{y \ln x}$ erhält man

$$d^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} -yx^{y-2} + y^2 x^{y-2} & x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x \\ x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x & x^y (\ln x)^2 \end{pmatrix}$$

mit

$$d^2 f(x,y)\Big|_{(1,5)} = \begin{pmatrix} 20 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Somit lautet die Lösung

$$\begin{aligned} f^{[2]}(1+0.01, 5-0.02) &= 1.05 + \frac{1}{2}\Big(20(0.01)^2 + 2(0.01)(-0.02)\Big) \\ &= 1.0508. \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

3. Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = xy^2 + \ln\frac{y}{x}$.

a) Definitionsbereich:

$$D_f = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{y}{x} > 0, x \neq 0\Big\}.$$

Gradient:

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f \\ \frac{\partial}{\partial y} f \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y^2 - \frac{1}{x} \\ 2xy + \frac{1}{y} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Richtungsableitung von f in $(-1,4)^T$ in Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist nicht definiert, da $(-1,4)^T \notin D_f$.

b) Richtungsableitung in Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf Strahl $y = 4x$, $x < 0$:

$$\begin{aligned} g(x) &= \Big\langle \nabla f(x,4x), \frac{(1,1)^T}{\sqrt{2}} \Big\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \Big\langle \begin{pmatrix} 16x^2 - \frac{1}{x} \\ 8x^2 + \frac{1}{4x} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \Big(24x^2 - \frac{3}{4x}\Big). \end{aligned}$$

Richtungsableitung ist am kleinsten, wenn $g'(x) \stackrel{!}{=} 0$ und $g''(x) > 0$:

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big(48x + \frac{3}{4x^2}\Big).$$

$$g'(x) \stackrel{!}{=} 0 \iff 4 * 48x^3 = -3 \iff x^3 = -\frac{1}{4^3} \iff x = -\frac{1}{4}.$$

Des weiteren haben wir

$$g''(x)\Big|_{x=-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big(48 - \frac{6}{4x^3}\Big)\Big|_{x=-\frac{1}{4}} > 0.$$

Somit erreicht die Richtungsableitung von f in Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ im Punkt $(-\frac{1}{4}, -1)$ den kleinsten Wert. Er beträgt

$$\Big\langle \nabla f(-\frac{1}{4}, -1), \frac{(1,1)^T}{\sqrt{2}} \Big\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{9}{2}.$$

Bitte wenden!

4. Gegeben seien die Funktionen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ucosv \\ usinv \\ e^{uv} \end{pmatrix},$$

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ \ln z \end{pmatrix}.$$

Bestimmung der Ableitung $dh = dg(f)$

a) unter Verwendung der expliziten Darstellung von h:

h lässt sich folgendermassen schreiben:

$$h = g(f) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto g(f(u,v)) = g(u\cos v, u \sin v, e^{uv}) = \begin{pmatrix} u^2 \\ uv \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} h_1(u,v) \\ h_2(u,v) \end{pmatrix}.$$

Somit gilt

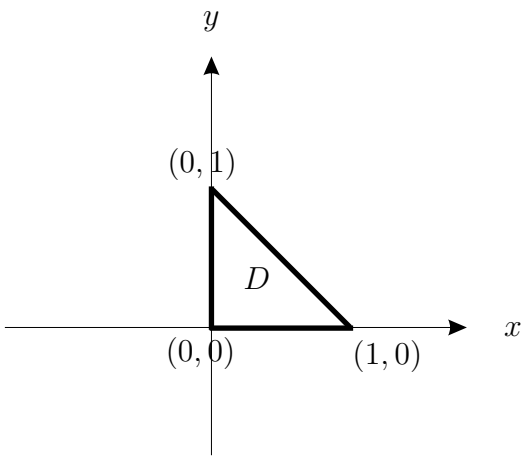
$$dh = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} h_1 & \frac{\partial}{\partial v} h_1 \\ \frac{\partial}{\partial v} h_2 & \frac{\partial}{\partial v} h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u & 0 \\ v & u \end{pmatrix}.$$

b) mit Kettenregel

$$\begin{aligned} dh &= dg\Big|_{f(u,v)} df\Big|_{(u,v)} \\ &= \begin{pmatrix} 2u\cos v & 2u \sin v & 0 \\ 0 & 0 & e^{-uv} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & \cos v \\ ve^{uv} & ue^{uv} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2u & 0 \\ v & u \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

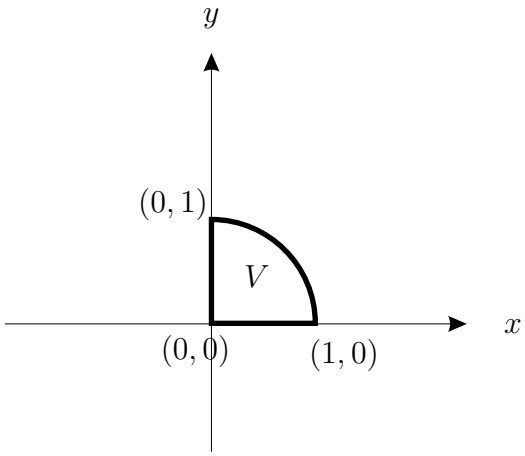
Siehe nächstes Blatt!

5. a)



$$\iint_D xy\ dxdy = \int_0^1 \int_0^{1-x} xy\ dydx = \frac{1}{2}\int_0^1 x - 2x^2 + x^3 dx$$
$$= \frac{1}{2}(1/2x^2 - 2/3x^3 + 1/4x^4)|_0^1 = \frac{6-8+3}{24} = \frac{1}{24}$$

b)



Variablentransformation: $T : (r, \varphi) \to (x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi)$ und $|det\ dT| = r$. Es folgt, dass:

$$\iint_V \cos\sqrt{x^2+y^2}\ dxdy = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} r\cos r\ drd\varphi = \frac{\pi}{2}\int_0^1 r\cos r\ dr$$
$$= \frac{\pi}{2}[(r\sin r)|_0^1 - \int_0^1 \sin r\ dr] = \frac{\pi}{2}(\sin 1 + \cos 1 - 1)$$

Bitte wenden!

6. a) Ein Vektorfeld F ist **wirbelfrei**, wenn die Rotation gleich Null ist.

$$rotF_1 = \frac{\partial}{\partial x}F_{1,2} - \frac{\partial}{\partial y}F_{1,1} = 2x + x = 3x \neq 0$$
$$rotF_2 = \frac{x}{(x+y)^2} - \frac{x}{(x+y)^2} = 0$$

Potentialfeld ? F_i ist ein Potentialfeld, wenn V_i existiert so dass $F_i = dV_i$, $i = 1, 2$.

Methode 1:
F_1 ist kein Potentialfeld, da Potentialfelder wirbelfrei sind. Um zu prüfen ob F_2 ein Potentialfeld ist, integrieren wir $F_{2,1}$ nach x und dann berechnen wir die partielle Ableitung nach y:

$$\int \frac{y}{x+y}\, dx = y\ln(x+y) + w(y)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x} y\ln(x+y) = F_{2,1}$$
$$\frac{\partial}{\partial y} y\ln(x+y) = F_{2,2}$$

falls $w(y) = 0$. Es folgt, dass $V_2(x, y) = y\ln(x+y)$.

Methode 2:
Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \to \gamma(t) = t(x,y)^T$ mit $\gamma(0) = 0$ und $\gamma(1) = (x,y)^T$. Falls F_1 ein Potentialfeld ist, ist die Potentialfunktion V_1 gegeben durch

$$V_1(x,y) = \int_\gamma F_1 = \int_0^1 F_1(\gamma(t))\frac{d}{dt}\gamma_1(t)dt + \int_0^1 F_2(\gamma(t))\frac{d}{dt}\gamma_2(t)dt$$
$$= \int_0^1 -t^2x^2y\ dt + \int_0^1 t^2x^2y\ dt = 0$$

F_1 ist also kein Potentialfeld.
Falls F_2 ein Potentialfeld ist, ist die Potentialfunktion V_2 gegeben durch

$$V_2(x,y) = \frac{xy}{x+y} + y\ln(x+y) + \frac{y^2}{x+y} - y = y\ln(x+y)$$

Da $\frac{\partial}{\partial x} y\ln(x+y) = F_{2,1}$ and $\frac{\partial}{\partial y} y\ln(x+y) = F_{2,2}$, ist F_1 ein Potentialfeld.

b) Arbeit F_1**:** $\int_\gamma F_1 = \int_{\gamma_1} F_1 + \int_{\gamma_2} F_1 + \int_{\gamma_3} F_1$

Mögliche Parametrisierung:

$$\gamma_1(t) = (-1+t, 2)^T, \quad \dot\gamma_1(t) = (1,0)^T, \quad t \in [0,1]$$
$$\gamma_2(t) = (0, 2-t)^T, \quad \dot\gamma_2(t) = (0,-1)^T, \quad t \in [0,1]$$
$$\gamma_3(t) = (\cos t, \sin t)^T, \quad \dot\gamma_3(t) = (-\sin t, \cos t)^T, \quad t \in [\pi/2, 0]$$

Siehe nächstes Blatt!

Es folgt, dass:

$$\int_{\gamma_1} F_1 = \int_0^1 [F_1(\gamma_1(t))\dot{\gamma}_{1,1}(t) + F_1(\gamma_1(t))\dot{\gamma}_{1,2}(t)] = \int_0^1 (2-2t)dt = 1$$
$$\int_{\gamma_2} F_1 = 0$$
$$\int_{\gamma_3} F_1 = \int_{\pi/2}^0 \cos t \sin^2 t \ dt + \int_{\pi/2}^0 \cos^2 t \cos t \ dt$$
$$= \int_{\pi/2}^0 \cos t \ dt = (\sin t)|_{\pi/2}^1 = \sin 0 - \sin \pi/2 = -1$$
$$\int_\gamma F_1 = \int_{\gamma_1} F_1 + \int_{\gamma_2} + F_1 \int_{\gamma_3} F_1 = 0$$

Arbeit F_2:
Da F_2 Potentialfeld mit Potentialfunktion V_2, es gilt:

$$\int_\gamma F_2 = V_2((-1,2)) - V_2((1,0)) = 0$$

7. a) Direkt als Linienintegral:

$$\int_{\partial R} F = \int_{\gamma_1} F + \int_{\gamma_2} F + \int_{\gamma_3} F + \int_{\gamma_4} F$$

Mögliche Parametrisierung:

$$\gamma_1(t) = (1-2t, 2, 2)^T, \quad \dot{\gamma}_1(t) = (-2,0,0)^T, \quad t \in [0,1]$$
$$\gamma_2(t) = (-1, 2-4t, 2-4t)^T, \quad \dot{\gamma}_2(t) = (0,-4,-4)^T, \quad t \in [0,1]$$
$$\gamma_3(t) = (-1+2t, -2, -2)^T, \quad \dot{\gamma}_3(t) = (2,0,0)^T, \quad t \in [0,1]$$
$$\gamma_4(t) = (1, -2+4t, -2+4t)^T, \quad \dot{\gamma}_4(t) = (0,4,4)^T, \quad t \in [0,1]$$

Es folgt dass:

$$\int_{\partial R} F = \int_0^1 \big[(10-4t)^T(-2,0,0)^T + (2-8t+(2-4t)^2, 3-8t, 2-4t)^T(0,-4,-4)^T$$
$$+ (4t-2, -5-2t, -4t-2)^T(2,0,0)^T + (-2+8t+(4t-2)^2)^T(0,4,4)^T\big] \ dt$$
$$= \int_0^1 (-96+176t) \ dt = -96+88 = -8$$

Andere mögliche Parametrisierung:

$$\gamma_1(t) = (t, 2, 2)^T, \quad \dot{\gamma}_1(t) = (1,0,0)^T, \quad t \in [1,-1]$$
$$\gamma_2(t) = (-1, t, t)^T, \quad \dot{\gamma}_2(t) = (0,1,1)^T, \quad t \in [2,-2]$$
$$\gamma_3(t) = (t, -2, -2)^T, \quad \dot{\gamma}_3(t) = (1,0,0)^T, \quad t \in [-1,1]$$
$$\gamma_4(t) = (1, t, t)^T, \quad \dot{\gamma}_4(t) = (0,1,1)^T, \quad t \in [-2,2]$$

Es folgt dass:

$$\int_{\partial R} F = \int_1^{-1} (2t+8, 3t+6, 2t+4)^T(1,0,0)^T dt + \int_2^{-2} (-2+2t+t^2, 2t-1, t)^T(0,1,1)^T dt$$
$$+ \int_{-1}^1 (2t, -t-6, -2t-4)^T(1,0,0)^T dt + \int_{-2}^2 (2+2t+t^2, 4t+1, 3t)^T(0,1,1)^T dt$$
$$= \int_1^{-1} 2t+8 \ dt + \int_2^{-2} 3t-1 \ dt + \int_{-1}^1 2t \ dt + \int_{-2}^2 7t+1 \ dt = -16+4+4 = -8$$

Bitte wenden!

Stokes:

$$\int_{\partial R} F = \int_R rotF \; d\sigma,$$

wobei $d\sigma$ ein Flächenelement ist. Hier $rot\ F = (1, 0, -1)^T$.
Parametrisiertung von R:

$$\varphi(s,t) = (1,-2,-2)^T + t(0,4,4)^T + s(-2,0,0)^T, \quad (t,s) \in [0,1]^2$$

Es folgt dass $d\sigma = (0,4,4)^T \times (-2,0,0)^T \; dsdt = (0,-8,8)^T \; dsdt$ und

$$\int_{\partial R} F = \int_R rotF \; d\sigma = \iint_{[0,1]^2} (1,0,-1)^T (0,-8,8)^T \; dsdt = \iint_{[0,1]^2} -8 \; dsdt = -8$$

b) $Fluss = \iint F d\sigma$, wobei $d\sigma$ ein Flächenelement der Quader ist.

Gauss:

$$\int_{\partial Q} F d\sigma = \int_Q divF \; dv,$$

wobei dv ein Volumenelement der Quader ist.
Die Divergenz ist gegeben durch

$$divF = \frac{\partial}{\partial x} F_1 + \frac{\partial}{\partial y} F_2 + \frac{\partial}{\partial z} F_3 = 6$$

Also der Fluss durch den Quader ist gleich

$$Fluss = 6 \text{ Volumen} = 6(2 \times 2 \times \sqrt{32}) = 96\sqrt{2}$$